Теоретические аспекты модифицированных дескриптивных алгебр изображений

Мигранов Н.Г., Исхаков А.Р. (intellab@mail.ru)

ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы»

Введение

Автоматизация обработки, анализа, оценивания и понимания информации, представленной в виде изображений, является одной из актуальной и узловой проблемой теоретической информатики, искусственного интеллекта и теории распознавания образов. Создание некоторой регулярной основы для систематизации, единообразного представления обрабатываемых данных (изображений) для построения математических моделей изображений и операций над ними, ориентированных на задачи обработки, анализа и распознавания позволит иметь в наличие универсальный язык для единообразного описания изображений и преобразований над ними. В рамках указанной проблемы ведущим направлением стала «алгебраизация» обработки, анализа и распознавания изображений, заключающаяся в разработке и исследовании различных алгебр изображений (АИ). Основной целью алгебраического подхода является построение теоретического аппарата, обеспечивающего представление изображений и преобразований над ними в виде алгебраических структур, позволяющих использовать в анализе и распознавании изображений математические методы.

В области распознавания образов и анализа изображений выделяют следующие основные стадии «алгебраизации»: математическая морфология (Г.Матерон (Matheron), Ж.Серра (Serra) [1970-е]); алгебра алгоритмов (Ю.И. Журавлев [1970-е]); теория образов (У.Гренандер (Grenander) [1970-е]); теория категорий в области распознавания образов (М.Павел (Pavel) [1970-е]); АИ (Ж.Серра, С.Стернберг (Sternberg) [1980- е]); стандартная алгебра изображений (САИ) (Г. Риттер (Ritter) [1990-е]); дескриптивная алгебра изображений (ДАИ) (И.Гуревич [1990- е]); дескриптивная алгебра изображений с одним кольцом (ДАИ1К) (И.Гуревич, В.Яшина [2002 и далее]).

1. Анализ математического аппарата ДАИ и ДАИ1К

Разработанный к настоящему моменту времени математический аппарат ДАИ и ДАИ1К [9-12] обладает рядом недостатков: неудобная терминология формальных обозначений, отсутствие конструктивности в описаниях методов и операций обработки и анализа изображений, абстрактное определение операции структуризации, слабая связь семантической и контекстной информации изображений и т.п., что обуславливает проведение дополнительных исследований в рамках уже существующих результатов в этом направлении. В данной статье предлагается формализованный подход к модификации математического аппарата ДАИ и ДАИ1К с целью исключения этих недостатков.

Кроме того, эта работа имеет и свою научную новизну, заключающуюся в следующих операциях над аппаратом ДАИ и ДАИ1К: в переопределении и модификации некоторых теоретических конструкций (реализации изображений, операция структуризации, семантическая и контекстная информация изображений, T- и P-представления, дескриптивные модели изображений, дескриптивные алгебры изображений), в отказе от некоторых элементов математического аппарата (порождающие преобразования и G-представления, дескриптивные T-, P-, G- и I-модели) и введение нового математического объекта «Пространство состояний изображений», как математической среды обработки и анализа изображений. Не вдаваясь в подробности таких изменений, перечислим всего лишь основные недостатки, которые послужили причиной модификации аппарата дескриптивного подхода к обработке и анализу изображений (ДПАИ):

- использование лишних символов в обозначениях математических объектов и операций над ними, что вызывает трудности в их восприятии и интерпретировании математических выражения;
- выбор бинарных отношений в качестве основы для записи реализаций изображений, что усложняет определение более сложных математических объектов;
- расширение аппарата ДАИ и ДАИ1К за счет ввода новых понятий без анализа на возможность использования уже существующих в абстрактной алгебре понятий;
- слабая связь между определенными ДАИ и использованными операциями преобразований над изображениями.

Определенные, таким образом, ДАИ называются *модифицированными дескриптивными алгебрами изображениями* (МДАИ).

2. Объекты МДАИ

Реализации изображений. Пусть объектом наблюдения является совокупность объектов или процессов действительности, которую будем называть сценой наблюдения или просто сценой. Изображение сцены может быть задано в разных форматах, которые называются его *реализациями* [9-12]. Таким образом, *изображение I* может быть задано в виде совокупности его реализаций $\{I_{bin}, I_{gray}, I_{color}\}$, соответствующих бинарным, полутоновым и цветным (полноцветное или палитровое) изображениям:

1. $I_{bin} \overset{def}{=} \|x_{ij}\|$, где $(\forall i,j)\left[x_{ij} \in \{0,1\}\right]$;
2. $I_{gray} \overset{def}{=} \|x_{ij}\|$, где $(\forall i,j)\left[x_{ij} \in \{0,...,255\}\right]$;
3. $I_{color} \overset{def}{=} \|x_{ij}\|$, где $(\forall i,j)\left[\left(x = \langle r,g,b\rangle\right) \wedge \left(r,g,b \in \{0,...,255\}\right)\right]$.

По умолчанию цветные реализации представляются в полноцветной форме.

Семантическая и контекстная информация для изображений. В дескриптивных алгебрах изображений исходное изображение задается не только множеством его реализаций, но и множеством контекстной и семантической информации, связанной со способами получения и формирования изображения или отражающей какие-либо его специфические аспекты [9-12]. Семантическая и контекстная информация, согласно работам И.Б. Гуревича, используется преобразованиями изображений. Последние должны быть замкнутыми относительно исходных данных и удовлетворять свойствам алгебры. Согласно определению множества исходных данных, который, своей частью содержит множество $\left\{\widetilde{B}\right\}$, под семантической и контекстной информацией нужно понимать «способы получения и формирования изображений или отражение каких-либо его специфических аспектов». Расшифровывая это утверждение можно сказать, что:

1. способы получения и формирования изображений связаны со сценой, для которой создается изображение, т.е. в этом пункте необходимо учитывать математическую модель камеры и природу источника освещения сцены (оптическое, ультрафиолетовое, инфракрасное и т.п.);
2. отражение каких-либо специфических аспектов предполагает использование информации о наблюдаемой сцене, его составе, о расположении составляющих ее элементов, т.е. в этот пункт нужно включить информацию не об устройстве фиксации и наблюдения, а о самой сцене.

Если первый пункт описывает контекст получения информации или отвечает на вопрос, «в каком контексте или аспекте производится наблюдение», то во втором пункте информация полностью характеризует саму сцену наблюдения [9-12]. Рассмотрение первого пункта требует дополнительных исследований. Целью такой работы может быть поставлена, например, так: определить положение и направление камеры, источника освещения так, чтобы максимизировать информативность изображения сцены и минимизировать шум. Такая формулировка задачи является наиболее общей и не может быть разрешена в силу ряда причин при такой постановке.

Словосочетание «семантика сцены» уместно использовать для второго пункта. Опираясь на семантику сцены можно предоставлять дополнительную информацию для операции структуризации $\widetilde{S}$, которая будет описана в следующем параграфе. Итак, если в семантику сцены включить элементарные геометрические фигуры (например, отрезок, окружность, кривые второго порядка и т.п.), то посредством применения структурирующего элемента $\widetilde{S}$ можно провести над изображением действия, которые «идеализируют» содержимое сцены. Под «идеализацией изображения» нужно понимать замену реальных объектов на изображении их идеальными формами. Таким образом, производится замена реального изображения изображением, содержащим модели реальных фигур.

3. Операции МДАИ: преобразования и представления

Операция структуризации реализаций изображений в МДАИ. К числу операций, проводимых над реализациями изображений, относятся [9-12]: *операция структуризации* $\widetilde{S}$; *процедурные преобразования* O_T^{param} *и параметрические преобразования* O_P^{param}; *T-представления* $\Re_T(\overline{\eta},\overline{\mu})$ *и P-представления* $\Re_P(\overline{\eta},\overline{\mu})$.

Согласно определению моделирования и смысла термина «структуризация», под действием структуризации нужно понимать процесс создания модели сцены в виде изображения, содержащего идеальные формы изображений реальных объектов на сцене. Предлагаются следующие варианты интерпретации операции структуризации $\widetilde{S}$: выделение на изображении структурных элементов или сложной структуры и восстановление идеальной формы структурных элементов или сложной структуры. Зафиксированные на изображении «идеальные» структурные элементы в дальнейшем будет удобно использовать в качестве совокупности фактов для системы распознавания посредством логического вывода. В данной работе операция структуризации рассматривается в виде действия ввода в реализацию изображения I некоторой структуры через фиксацию в нем структурных элементов. Таким образом, предлагаются следующие варианты интерпретации операции структуризации:

$$S(\cdot,\mu): I_{bin}{}' \to I_{bin}{}'', \mu \in M_S$$
$$S(\cdot,\mu): I_{gray}{}' \to I_{bin}{}'', \mu \in M_S$$
$$S(\cdot,\mu): I_{color}{}' \to I_{gray}{}'', \mu \in M_S,$$

где $\mu \in M_S$, где $M_S = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\}$ - конечное множество структурных элементов, обычно представляемых геометрическими фигурами на плоскости. Запись $S(I_{bin}^{'}, \mu_1) = I_{bin}^{''}$ означает ввод структурного признака μ_1 в исходное изображение $I_{bin}^{'}$ и получение после этого действия изображения $I_{bin}^{''}$. Отдельно можно выделить еще одну форму этой операции:

$$S(\cdot;*): I_f \to I_f, * \in M_S, f \in \{bin, gray, color\},$$

Где знак * - имеет двойное назначение, он означает пустой структурный элемент для операции $S(\cdot,\mu)$ или является обозначением отсутствующего параметра для преобразований и представлений.

Определенная таким образом операция структуризации обладает важными свойствами для линейной последовательности и иерархической взаимосвязи структурных элементов.

Основное свойство операции структуризации для линейного представления:

$$S(I_{bin}, (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)) = S(S(I_{bin}, \mu_1), (\mu_2, ..., \mu_n))$$

Дополнительное свойство структуризации для древовидного представления:

$$S(\cdot;T) = S(\cdot;\widetilde{V}), T = \langle V, U \rangle, V = \{v_1, ..., v_n\}, U = \{u_1, ..., u_m\},$$ где

$T = \langle V, U \rangle$ есть дерево, заданное множествами вершин $V = \{v_1, ..., v_n\}$ и дуг $U = \{u_1, ..., u_m\}$, а $\widetilde{V}$ - множество, получаемое из множества $V = \{v_1, ..., v_n\}$ исключением корня, узлов, дуг и повторяющихся листочков.

Процедурные преобразования МДАИ. Процедурное преобразование согласно определению в себя включает такие распространенные действия над изображением (или группой изображений), как конвертирование из одного формата в другое, фильтрацию шумов в изображении, определение краев и т.п [9-12]. Большинство алгоритмов обработки изображений относятся к группе процедурных преобразований.

Операция конвертации или конвертирования позволяет изменять форму реализации, которая образуют первую подгруппу процедурных преобразований. Современные инструментальные средства позволяют конвертировать полутоновое изображение в бинарное изображение и цветное изображение в полутоновое изображение (или наоборот). Предлагаемая формализация операции конвертирования обладает рядом преимуществ: ясна природа операции конвертирования, конструктивность определения операции, прозрачность в применении операции, совместимость с другими видами операциями. Математически эту операцию можно записать следующим образом:

1. пороговое конвертирование полутоновой реализации в бинарную реализацию с порогом η_0:

   $O_T^{gray \to bin}(I_{gray}, \eta_0) = O_T^{gray \to bin}(\|x_{ij}\|, \eta_0) = \|y_{ij}\| = I_{bin}$, где $y_{ij} = \begin{cases} 0, & x_{ij} < \eta_0 \\ 1, & x_{ij} \ge \eta_0 \end{cases}$ и

   $I_{gray} = \|x_{ij}\|$, т.е. $O_T^{gray \to bin}(I_{gray}, \eta_0) = I_{bin}$ или $O_T^{gray \to bin}(\cdot, \eta_0) : I_{gray} \to I_{bin}$.

2. конвертирование цветной реализации (полноцветное изображение) в полутоновую реализацию:

   $O_T^{color \to gray}(I_{color}, *) = O_T^{color \to gray}(\|\langle r, g, b \rangle_{ij}\|, *) = \|y_{ij}\| = I_{gray}$, где $y_{ij} = \left\lfloor \dfrac{r+g+b}{3} \right\rfloor$

   или $y_{ij} = \left\lceil \dfrac{r+g+b}{3} \right\rceil$ и $I_{color} = \|\langle r, g, b \rangle_{ij}\|$, т.е. $O_T^{color \to gray}(I_{color}, *) = I_{gray}$ или $O_T^{color \to gray}(\cdot, *) : I_{color} \to I_{gray}$.

3. комплексная операция конвертирования цветной реализации (полноцветное изображение) в бинарное бинарную реализацию с отсечением по порогу η_0:

$$O_T^{color\to bin}(I_{color},\eta_0)=O_T^{gray\to bin}(O_T^{color\to gray}(I_{color},*),\eta_0)=\times$$
$$\times=O_T^{gray\to bin}(O_T^{color\to gray}(\left\|x_{ij}\right\|,*),\eta_0)=\times$$
$$\times=\left|I_{color}=\left\|x_{ij}\right\|=\left\|\langle r,g,b\rangle_{ij}\right\|,I_{gray}=\left\|y_{ij}\right\|,y_{ij}=\left\|\left\lceil\frac{r+g+b}{3}\right\rceil\right\|\right|=\times$$
$$\times=O_T^{gray\to bin}(\left\|y_{ij}\right\|,\eta_0)=O_T^{gray\to bin}(\left\|\left(\left\lceil\frac{r+g+b}{3}\right\rceil\right)_{ij}\right\|,\eta_0)=\times$$
$$\times=\left|I_{gray}=\left\|y_{ij}\right\|=\left\|\left(\left\lceil\frac{r+g+b}{3}\right\rceil\right)_{ij}\right\|,I_{bin}=\left\|z_{ij}\right\|,z_{ij}=\begin{cases}0, & \left(\left\lceil\frac{r+g+b}{3}\right\rceil\right)_{ij}<\eta_0\\ 1, & \left(\left\lceil\frac{r+g+b}{3}\right\rceil\right)_{ij}\ge\eta_0\end{cases}\right|=\times$$
$$\times=I_{bin}$$

Следовательно,

$$O_T^{color\to bin}(I_{color},\eta_0)=O_T^{gray\to bin}(O_T^{color\to gray}(I_{color},*),\eta_0)=\times$$
$$\times=O_T^{gray\to bin}(O_T^{color\to gray}(\left\|\langle r,g,b\rangle_{ij}\right\|,*),\eta_0)=I_{color}=\left\|z_{ij}\right\|,$$

где $z_{ij}=\begin{cases}0, & \left(\left\lceil\frac{r+g+b}{3}\right\rceil\right)_{ij}<\eta_0\\ 1, & \left(\left\lceil\frac{r+g+b}{3}\right\rceil\right)_{ij}\ge\eta_0\end{cases}$, т.е. $O_T^{color\to bin}(\cdot,\eta_0):I_{color}\to I_{bin}$.

Другую подгруппу класса процедурных преобразований составляют методы фильтрации изображений. В данной работе они формализованы только для полутоновых реализаций. Пусть заданы полутоновая реализация $I_{gray}=\left\|x_{ij}\right\|$ изображения размера $M\times N$ и маска w размера $m\times n$, где $m=2*a+1, n=2*b+1$ и a и b – суть неотрицательные целые числа. Отклик в точке $(i;j)$ для полутоновой реализации I_{gray} обозначим $g(i,j)$. В таком случае он будет определен как:

$$g(i,j)=\sum_{k=-a}^{a}\sum_{l=-b}^{b}w_{k,l}*x_{i+k,j+l},\quad (i=\overline{0,M-1},j=\overline{0,N-1}),$$

где $w_{k,l}$ - маска размера $m\times n$, $a=\frac{m-1}{2},b=\frac{n-1}{2}$.

Определим процедурное преобразование $O_T^{filter}(I_{gray},(n,m))$ для разных видов линейных и нелинейных пространственных фильтров. Ясно, что

$$O_T^{filter}(I_{gray},(n,m))=O_T^{filter}(\left\|x_{ij}\right\|,(n,m))=\left\|y_{ij}\right\|=I_{gray},\text{ где}$$

1. для общего случая фильтрации

$$y_{ij}=\left(\sum_{k=-a}^{a}\sum_{l=-b}^{b}w_{k,l}*x_{i+k,j+l}\right)\mod 256$$

2. для однородного усредняющего фильтра

$$y_{ij} = \left(\frac{\sum_{k=-a}^{a} \sum_{l=-b}^{b} w_{k,l}}{m * n} \right) \mod 256$$

3. для сглаживающего фильтра с взвешенным средним

$$y_{ij} = \left(\frac{\sum_{k=-a}^{a} \sum_{l=-b}^{b} w_{k,l} * x_{i+k,j+l}}{\sum_{k=-a}^{a} \sum_{l=-b}^{b} w_{k,l}} \right) \mod 256$$

4. для фильтров, основанных на порядковых статистиках (медианный)

$$y_{ij} = Sort(\{x_{i-\left[\frac{m}{2}\right],j-\left[\frac{n}{2}\right]},\ldots,x_{i+\left[\frac{m}{2}\right],j+\left[\frac{n}{2}\right]}\}),$$ где

$Sort$ - алгоритм сортировки по неубыванию

5. для фильтра повышения резкости с использованием лапласиана ∇

$$y_{ij} = \left(\begin{cases} x_{ij} - \nabla^2 x_{ij}, & если \quad w_{00} < 0 \\ x_{ij} + \nabla^2 x_{ij}, & если \quad w_{00} \ge 0 \end{cases} \right) \mod 256$$

6. для фильтрации с нерезким маскированием

$$y_{ij} = x_{ij} - \overline{x_{ij}},$$ где

x_{ij} - исходное изображение, а $\overline{x_{ij}}$ - расфокусированное изображение x_{ij}

7. для фильтрации с подъемом высоких частот

$$y_{ij} = K * x_{ij} - \overline{x_{ij}},\ \text{где}\ K \ge 1,\ a = \frac{m-1}{2}, b = \frac{n-1}{2}$$

Рассмотренные фильтры определяют отображение $O_T^{filter}(\cdot,(n,m)) : I_{gray} \to I_{gray}$.

Третью подгруппу процедурных преобразований образуют морфологические методы. В данной работе рассмотрены морфологические операции только для бинарных реализаций. В таблице 1 приведены основные теоретико-множественные операции.

Таблица 1

Теоретико-множественные операции

Название	**Обозначение**	**Определение**
Объединение множеств А и В	$A \cup B$	$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
Пересечение множеств А и В	$A \cap B$	$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
Разностью множеств А и В	$A \setminus B$	$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
Дополнением к множеству А	$\overline{A}$	$\overline{A} = \{x \mid (x \notin A) \wedge (x \in U)\}$, где U - универсальное множество (универсум)
Центральное	$\widehat{A}$	$\widehat{A} = \{x \mid (x = -y) \wedge (y \in A)\}$

отражение множества A		
Параллельный перенос (сдвиг) множества A	$(A)_z$	$(A)_z = \{x \mid (x = y + z) \wedge (y \in A)\}$

К стандартным морфологическим операциям относятся: дилатация, эрозия, размыкание, замыкание, преобразование «успех-неудача» и т.д. Как и в случае теории множеств одни морфологические операции легко определяются через базовые. Роль базовых операций будут выполнять дилатация и эрозия.

Определение: Дилатацией множества A по множеству B называется

$$A \oplus B = \{x \mid (\hat{B})_x \cap A \neq \varnothing\}$$

Определение: Эрозией множеств A и B называется множество

$$A \odot B = \{x \mid (B)_x \subseteq A\}$$

Определив эти операции, как процедурные преобразования

$$O_T^{dl}(I_{bin};\|\mu\|) = I_{bin} \oplus \|\mu\|$$

$$O_T^{er}(I_{bin};\|\mu\|) = I_{bin} \odot \|\mu\|,$$

где $A = I_{bin}$, $B = \|\mu\|$.

морфологические операции замыкания и размыкания можно записать, так:

$$O_T^{\circ}(I_{bin};\|\mu\|) = O_T^{dl}(O_T^{er}(I_{bin};\|\mu\|);\|\mu\|)$$

$$O_T^{\bullet}(I_{bin};\|\mu\|) = O_T^{er}(O_T^{dl}(I_{bin};\|\mu\|);\|\mu\|)$$

Деление процедурных преобразований на три подгруппы не является окончательным. Расширение класса процедурных преобразований всегда возможно за счет выбора методов, преобразовывающих одни виды реализаций в другие виды. При этом не менее важным является их правильная запись в формальном виде.

Параметрические преобразования МДАИ. Классический подход классификации признаков на детерминированные, вероятностные, логические и структурные признаки сводится всего лишь к трем из них, где отсутствует класс логических признаков [3]. Это обусловлено тем, что в работе принимается решение об отнесении методов вычисления логических признаков к простейшим логическим системам принятия решений. В таблице 2 приведены формализованные обозначения основных параметрических преобразований.

Таблица 2

Параметрические преобразования

№	**Название параметрического преобразования**	**Обозначение**
1	Вычисление детерминированного признака	$O_P^{\det erm}(\cdot;p)$, где p - числовая величина
2	Вычисление вероятностного признака	$O_P^{probal}(\cdot;p)$, где $p \in \{m_i, u_j, g_k, \varepsilon, ...\}$
3	Вычисление логического признака	не определено
4	Вычисление структурного признака	$O_P^{struct}(\cdot;p_k)$, где $k \in \{border, area\}$

Каждый из параметрических преобразований записан в формальном виде, за исключением методов для вычисления детерминированных признаков. Это основано на том, что методы для их вычисления однотипны – метод определен на реализации, а множество значений представляет одноэлементное множество, состоящее из чисел скалярного, векторного или матричного вида. В отличие от них методы вычисления вероятностных признаков более разнообразны. Однако большинство вероятностных методов представляют собой системы принятия решений, поэтому в класс вероятностных признаков вошли статистические признаки для реализации изображения $I_f = \left\| x_{ij}^f \right\|$, где $f = bin$ [1, 5, 6]:

– начальные моменты k-го порядка - $O_P^{probal}(I_f;m_k) = \frac{1}{n*m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij}^f\right)^k$,

Согласно этой формулировке получаем ее частные случаи:

1. $m_1 = O_P^{probal}(I_f;m_1) = \frac{1}{n*m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}^f$ - начальный момент 1-го порядка или математическое ожидание (среднее);
2. $m_2 = O_P^{probal}(I_f;m_2) = \frac{1}{n*m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij}^f\right)^2$ - начальный момент 2-го порядка или средний квадрат;
3. $m_3 = O_P^{probal}(I_f;m_3) = \frac{1}{n*m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij}^f\right)^3$ - начальный момент 3-го порядка;
4. $m_4 = O_P^{probal}(I_f;m_4) = \frac{1}{n*m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij}^f\right)^4$ - начальный момент 4-го порядка;

– центральные моменты $u_k = O_P^{probal}(I_f;u_k)$

1. $u_2 = m_2 - m_1^2$ - центральный момент 2-го порядка или дисперсия. Отсюда можно вычислить среднеквадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{u_2}$;
2. $u_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^2$ - центральный момент 3-го порядка;
3. $u_3 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$ - центральный момент 4-го порядка;

- коэффициент асимметрии $g_1 = O_P^{probal}(I_f; g_1) = \dfrac{u_3}{\sigma^3}$;
- коэффициент эксцесса $g_2 = O_P^{probal}(I_f; g_2) = \dfrac{u_4}{\sigma^4} - 3$;
- энтропия $\varepsilon = O_P^{probal}(I_f; \varepsilon) = -\sum_i p_i \log_2 p_i$, где $p_i = P(X = x_i)$;
- избыточность или относительная энтропия $\varepsilon_D = 1 - \dfrac{I}{I_0}$, где $I_0 = \log_2\left(h_{\max} - h_{\min} + 1\right)$ и $h_{\max}, h_{\min}$ - максимальный и минимальный уровни поля (для бинарной реализации $h = 2$, для полутоновой реализации $h = 256$);

В отличие от вероятностных признаков структурные признаки менее разнообразны. Под измерением структурного признака нужно понимать идентификацию непроизводных элементов и связей между ними. К структурным признакам можно отнести условные коды, описывающие границы фигур на изображении. В настоящее время наиболее распространенными методами описания границ принято считать [1, 2, 5, 6]:

1. кодирование по трем признакам: длине текущего элементарного вектора, направлению поворота при переходе к следующему элементарному вектору и углу между соседними элементарными векторами;
2. кодирование текущего элементарного вектора трехразрядным двоичным кодом (метод Фримена);
3. Р-представление контура;
4. кодирование текущего элементарного вектора двумя его проекциями на оси координат (двухмерный код);
5. полигональное представление контура;
6. представление контура радиус-векторами, приведенными из центра тяжести фигуры;
7. представление контура в виде функции комплексного переменного;
8. представление элементарного вектора контура в плоскости квадратной сетки комплексными числами.

Методы вычисления значений структурных признаков представляют алгоритмы. В работе приведена текстовая формулировка этого алгоритма для бинарной реализации I_{bin} изображения I [1,2, 5, 6]:

1. наложить на изображение I равномерную сетку;
2. в качестве элементов границы выбрать те элементы реализации I_{bin}, более 50% площади которых находится в пределах рассматриваемой фигуры;
3. выбрать из числа элементов реализации I_{bin} те, которые не являются внутренними (внешние элементы фигуры);
4. применить один из 8 методов кодирования последовательности выбранных на 3 шаге элементов;

Результатом применения этого алгоритма будет последовательность кодов, описывающих граничные точки фигуры, изображенной на реализации I_{bin} [2, 3, 5, 6].

Пусть дана бинарная реализация I_{bin} изображения I, т.е. $I_{bin}=\left\|x_{ij}\right\|$, где $x_{ij}\in\{0,1\}$. Степень детализации реализации I_{bin} изображения I выберем на уровне пикселей, т.е. каждый из элементов x_{ij} соответствует пикселю изображения I. Алгоритм, представляющий простую процедуру, для определения границ в виде последовательности цепных кодов приведен ниже:

$$
\begin{aligned}
&A\lg(I_{bin}\downarrow;\{q_1,...,q_m\}\uparrow)\\
&\Big\langle I_{bin}\Rightarrow A=\Big\{\left\langle x_{ij},\ \langle i,j\rangle\right\rangle\,|\,\left(I_{bin}=\left\|x_{ij}\right\|\right)\wedge\left(x_{ij}=1\right)\Big\},\\
&A\Rightarrow B^h=\Big\{\left\langle x_{kj},\ \langle i,j\rangle\right\rangle\,|\,\Big(\left\langle x_{kj},\ \langle i,j\rangle\right\rangle\in A\Big)\wedge\Big[\left(k=\min(i)\right)\vee\left(k=\max(i)\right)\Big]\Big\},\\
&A\Rightarrow B^v=\Big\{\left\langle x_{il},\ \langle i,j\rangle\right\rangle\,|\,\Big(\left\langle x_{il},\ \langle i,j\rangle\right\rangle\in A\Big)\wedge\Big[\left(l=\min(j)\right)\vee\left(l=\max(j)\right)\Big]\Big\},\\
&\left(B^h\cup B^v\right)\Rightarrow B=Dom\left(B^h\cup B^v\right),\\
&B\Rightarrow\{q_1,...,q_m\}\Big\rangle
\end{aligned}
$$

или в общей форме:

$$\{q_1,...,q_m\}=O_P^{struct}(I_{bin};*)=A\lg(I_{bin}\downarrow;\{q_1,...,q_m\}\uparrow)$$

Такое процедурное преобразование не является параметрическим. Если эту же задачу решать с привлечением методов, которые являются параметрическими, то и алгоритм будет являться параметрическим. Например, если используется операторы дискретного дифференцирования, то алгоритм будет иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&A\lg(I_{bin}\downarrow,\overline{\eta}\downarrow;\{q_1,...,q_m\}\uparrow)=A\lg(I_{bin}\downarrow,(n,m)\downarrow;\{q_1,...,q_m\}\uparrow)\\
&\Big\langle I_{bin}\Rightarrow I_{bin}^{'}=O_T^{filter}(I_{bin},(n,m)),\\
&I_{bin}^{'}\Rightarrow B=\Big\{\left\langle x_{ij},\ \langle i,j\rangle\right\rangle\,|\,\left(I_{bin}=\left\|x_{ij}\right\|\right)\wedge\left(x_{ij}=1\right)\Big\},\\
&B\Rightarrow C=Dom\left(B\right),\\
&C\Rightarrow\{q_1,...,q_m\}\Big\rangle
\end{aligned}
,
$$

где $\overline{\eta}=(n,m)$ - параметр алгоритма и процедурного преобразования фильтрации.

Или в общей форме:

$$\{q_1,...,q_m\}=O_P^{struct}(I_{bin};\overline{\eta})=A\lg(I_{bin}\downarrow,\overline{\eta}\downarrow;\{q_1,...,q_m\}\uparrow)$$

Параметр $\overline{\eta}$ указывает на векторную природу параметра метода. Это означает, что параметр может быть и более сложным математическим объектом.

Ситуацию, когда параметр является матрицей, описывает следующий случай. Здесь значением параметра является маска преобразования, например, в случае выделения границ с помощью метода математической морфологии. Его математическая модель может быть записана так:

$$
\begin{aligned}
&A\lg(I_{bin}\downarrow,\|\mu\|\downarrow;\{q_1,...,q_m\}\uparrow)\\
&\Big\langle I_{bin}\Rightarrow I'_{bin}=I_{bin}\setminus(I_{bin}\odot\|\mu\|),\\
&I'_{bin}\Rightarrow B=\Big\{\Big\langle x_{ij},\quad\langle i,j\rangle\Big\rangle\,|\,\Big(I_{bin}=\|x_{ij}\|\Big)\wedge\Big(x_{ij}=1\Big)\Big\},,\\
&B\Rightarrow C=Dom\big(B\big),\\
&C\Rightarrow\{q_1,...,q_m\}\Big\rangle
\end{aligned}
$$

где $A=I_{bin}$ - исходное изображение, а $B=\|\mu\|$ - маска.
Или в общей форме:

$$\{q_1,...,q_m\}=O_P^{struct}(I_{bin};\overline{\mu})=A\lg(I_{bin}\downarrow,\|\mu\|\downarrow;\{q_1,...,q_m\}\uparrow),$$

где $\overline{\mu}=\|\mu\|$.

Т-представления МДАИ.

Определение [9-12]: Т-представлением $\Re_T(\overline{\eta},\overline{\mu})$ изображения I называется формальная схема, предназначенная для получения стандартизированного формального описания изображения и построенная на основании контекстной и семантической информации $\{B\}\subset\{\widetilde{B}\}$ с помощью процедурных преобразований $\{O_T(\overline{\eta})\}\subset\{\widetilde{O_T}\}$ и структурирующих элементов $\{S(\overline{\mu})\}\subset\{\widetilde{S}\}$. Множество всех корректных Т-представлений обозначается $\{\Re_T(\overline{\eta},\overline{\mu})\}$.

Определение [9-12]: Реализацией Т-представления $\Re_T(\overline{\eta},\overline{\mu})$ изображения I называется применение представления $\Re_T(\overline{\eta},\overline{\mu})$ с выбранными значениями $(\overline{\eta}=\overline{\eta_0},\overline{\mu}=\overline{\mu_0})$ параметров преобразований, входящих в представление к реализациям исходного изображения $\{I_{bin},\quad I_{gray},\quad I_{color}\}$.

Т-представления создаются на основе процедурных преобразований и операции структуризации. Оно является сложной операцией по сравнению с любым процедурным преобразованием и позволяет зафиксировать на реализации идеальные формы структурных объектов. Полученный результат является дескриптивной моделью изображения, т.е. стандартизированным формальным описанием изображения. Обобщенная математическая модель Т-представления на случай совокупности структурных элементов (геометрических объектов) множества $M_S=\{\mu_1,\mu_2,...,\mu_n\}$, с использованием основного свойства операции структуризации S и операции конвертирования с произвольной реализации в бинарную реализацию имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\Re_T(\eta_0,\mu_0)(I_f) =< O_T^{f\to bin}(\cdot,\eta_0), S(\cdot,(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n) > (I_f) = \times \\
&\times =< S(\cdot,(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n) > (O_T^{f\to bin}(I_f,\eta_0)) = \times \\
&\times =< S(\cdot,(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n) > (I_{bin}) = S(S(I_{bin},\mu_1),(\mu_2,...,\mu_n)) = \times \\
&\times = S(I_{bin}^1,(\mu_2,...,\mu_n)) = S(S(I_{bin}^1,\mu_2),(\mu_3,...,\mu_n)) = \times \\
&... \\
&\times = S(S(I_{bin}^{n-2},\mu_{n-1}),\mu_n) = S(I_{bin}^{n-1},\mu_n) = I_{bin}^n = I_{bin}
\end{aligned},$$

где $f \in \{color, gray\}$.

Как видно из последнего результата

$$\Re_T(\eta_0,(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)) : I_f \to I_{bin}.$$

Выберем в качестве процедурного преобразования операцию фильтрации. Она обычно используется не только при фильтрации от шумов, но и при улучшении и восстановлении изображений. Математическая модель такого Т-представления с операциями фильтрации и структуризации элементов $\mu_1,\mu_2,...,\mu_n$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\Re_T(\overline{\eta},(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n))(I_{gray}) =< S(\cdot,(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)) > (O_T^{filter}(I_{gray},(n,m))) = \times \\
&\times =< S(\cdot,(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)) > (I_{gray}^0) = S(S(I_{gray}^0,\mu_1),(\mu_2,...,\mu_n)) = \times \\
&\times = S(I_{gray}^1,(\mu_2,...,\mu_n)) = S(S(I_{gray}^1,\mu_2),(\mu_3,...,\mu_n)) = \times \\
&... \\
&\times = S(S(I_{gray}^{n-2},\mu_{n-1}),\mu_n) = S(I_{gray}^{n-1},\mu_n) = I_{gray}^n = I_{gray}
\end{aligned}$$

При этом оно реализует отображение:

$$\Re_T((n,m),(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)) : I_{gray} \to I_{gray}$$

Рассмотрим пример для этого Т-представления и проведем его структурный анализ. На первом шаге этого представления полутоновая реализация изображения I_{gray} фильтруется от шума с помощью некоторого пространственного линейного фильтра с ядром ранга (n,m), а потом в новой полутоновой реализации, полученной после фильтрации, происходит выделение структурных элементов $\mu_1,\mu_2,...,\mu_n$. В итоге снова получается полутоновая реализация.

$$\begin{aligned}
&\Re_T(\overline{\eta},(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n))(I_{gray}) =< S(\cdot,(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)) > (O_T^{filter}(I_{gray},(n,m))) = \\
&\times = \left| I_{gray} = \|x_{ij}\|, I_{gray}^0 = \|y_{ij}\|, y_{ij} = \left(\sum_{k=-a}^{a} \sum_{l=-b}^{b} w_{k,l} * x_{i+k,j+l} \right) \mod 256, a = \frac{m-1}{2}, b = \frac{n-1}{2} \right| \\
&\times =< S(\cdot,(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)) > (I_{gray}^0) = S(S(I_{gray}^0,\mu_1),(\mu_2,...,\mu_n)) = \times \\
&\times = S(I_{gray}^1,(\mu_2,...,\mu_n)) = S(S(I_{gray}^1,\mu_2),(\mu_3,...,\mu_n)) = \times \\
&... \\
&\times = S(S(I_{gray}^{n-2},\mu_{n-1}),\mu_n) = S(I_{gray}^{n-1},\mu_n) = I_{gray}^n = I_{gray}
\end{aligned}$$

Аналогично можно записать Т-представления, содержащие морфологические операции. Например, математическая модель Т-представления с морфологической операцией размыкания и операцией структуризации последовательности элементов $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ в бинарной реализации I_{bin} имеет вид:

$$\Re_T(\eta, \overline{\mu})(I_{bin}) =< O_T^{\circ}(\cdot, \|\eta\|), S(\cdot, (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)) > (I_{bin}) = \times$$
$$\times =< S(\cdot, (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)) > (O_T^{\circ}(I_{bin}, \|\eta\|)) = \times$$
$$\times = \left| O_T^{\circ}(I_{bin}; \|\eta\|) = O_T^{dl}(O_T^{er}(I_{bin}; \|\eta\|); \|\eta\|) \right| = \times$$
$$\times = \left| O_T^{dl}(\cdot; \|\eta\|) : I_{bin} \to I_{bin}, O_T^{er}(\cdot; \|\eta\|) : I_{bin} \to I_{bin}, O_T^{\circ}(\cdot; \|\eta\|) : I_{bin} \to I_{bin} \right| = \times$$
$$< S(\cdot, (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)) > (I_{bin}^0) = S(S(I_{bin}^0, \mu_1), (\mu_2, ..., \mu_n)) = S(I_{bin}^1, (\mu_2, ..., \mu_n)) = \times$$
$$\times = S(S(I_{bin}^1, \mu_2), (\mu_3, ..., \mu_n)) = ... = S(S(I_{bin}^{n-2}, \mu_{n-1}), \mu_n) = S(I_{bin}^{n-1}, \mu_n) = I_{bin}^n = I_{bin}$$

Она реализует отображение $\Re_T(\eta, \overline{\mu}) : I_{bin} \to I_{bin}$, где $\eta = \|\eta\|, \overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$

Замечание: Операция структуризации S может отсутствовать в составе Т-представления, когда производится процедурное преобразование реализации. В таком случае обычно ее используют с пустым структурным элементом. Например, Т-представление с процедурным преобразованием конвертирования может быть записано следующим образом:

$$\Re_T(\overline{\eta}, *)(I_X) =< O_T^{X \to bin}(\cdot, \overline{\eta}), S(\cdot, *)) > (I_X) =< S(\cdot, *) > (O_T^{X \to bin}(I_X, \overline{\eta})) = \times$$
$$\times =< S(\cdot, *) > (I_{bin}) = S(I_{bin}, *) = I_{bin}$$

Р-представления МДАИ. Р-представления изображения представляют другую разновидность представлений в ДАИ и ДАИ1К [9-12]. Согласно концепции И.Б. Гуревича под параметрическим преобразованием подразумевается операция, применение которой к реализации изображения I преобразовывает его в числовую характеристику p. С другой стороны этой числовой характеристике p сопоставляются свойства геометрических объектов, яркостных характеристик или конфигураций, образующихся за счет регулярных повторений геометрических объектов и яркостных характеристик исходного изображения.

Теория распознавания образов делит множество всех возможных признаков на: детерминированные, вероятностные, логические и структурные классы признаков [2, 3, 5, 6]. Из перечисленных классов признаков интуитивно можно выделить в роль главных вероятностные и структурные признаки. Детерминированные признаки можно рассматривать как вероятностные, у которых функция распределения представлена единственным значением, вероятность которого равна 1. Логические же признаки, как ранее отмечалось, в данной работе не представляют отдельный независимый класс признаков, в силу своей природы. Хотя они и отличаются от вероятностных признаков, их вычисление можно назвать процессом работы системы принятия решений.

В данной работе предлагаются следующие определения Р-представления и его реализации, сформулированные И.Б. Гуревичем [9-12]:

Определение [9-12]: Р-представлением $\Re_P(\overline{\eta}, \overline{\mu})$ изображения I называется формальная схема, предназначенная для получения его числовой характеристики и построенная на основании контекстной и семантической информации $\{B\} \subset \{\widetilde{B}\}$ с помощью параметрических преобразований $\{O_P(\overline{\eta})\} \subset \{\widetilde{O_P}\}$ и структурирующих элементов $\{S(\overline{\mu})\} \subset \{\widetilde{S}\}$. Множество всех корректных Р-представлений обозначается $\{\Re_P(\overline{\eta},\overline{\mu})\}$.

Определение [9-12]: Реализацией Р-представления $\Re_P(\overline{\eta},\overline{\mu})$ изображения I называется применение представления $\Re_P(\overline{\eta},\overline{\mu})$ с выбранными значениями $(\overline{\eta}=\overline{\eta_0}, \overline{\mu}=\overline{\mu_0})$ параметров преобразований, входящих в представление к реализациям исходного изображения $\{I_{bin},\ \ I_{gray},\ \ I_{color}\}$.

Любое корректное Р-представление из множества $\{\Re_P(\overline{\eta},\overline{\mu})\}$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\Re_P(\overline{\eta_0},\overline{\mu_0})(I_f) = \Re_P(\overline{\eta_0},(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n))(I_f) =< S(\cdot,(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n),O_P^{param}(\cdot,\overline{\eta_0})) > (I_f) = \times \\
&\times =< O_P^{param}(\cdot,\overline{\eta_0})) > \left(S(\cdot,(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)(I_f)\right) =< O_P^{param}(\cdot,\overline{\eta_0})) > \left(S(S(I_f,\mu_1),(\mu_2,...,\mu_n))\right) = \times \\
&\times =< O_P^{param}(\cdot,\overline{\eta_0})) > \left(S(I_f^1,(\mu_2,...,\mu_n))\right) =< O_P^{param}(\cdot,\overline{\eta_0})) > \left(S(S(I_f^1,\mu_2),(\mu_3,...,\mu_n))\right) = \times \\
&... \\
&\times =< O_P^{param}(\cdot,\overline{\eta_0})) > \left(S(S(I_f^{n-2},\mu_{n-1}),\mu_n)\right) =< O_P^{param}(\cdot,\overline{\eta_0})) > \left(S(I_f^{n-1},\mu_n)\right) = \times \\
&\times =< O_P^{param}(\cdot,\overline{\eta_0})) > \left(I_f^n\right) = O_P^{param}(I_f^n,\overline{\eta_0}) = \overline{\eta_0}
\end{aligned},$$

где $param \in M_p = \{\det erm,\ \ probal,\ \ struct\}$ и $f \in \{bin,\ \ gray,\ \ color\}$.

Эта математическая модель может быть использована для решения, например, такой задачи: дана полутоновая реализация I_{gray}, нужно вычислить значение статистического момента 1-го порядка m_1 для структурного объекта «окружность» $\mu_{\text{î êðóæ í î ñò ü}}$. Математическая модель этого процесса преобразования полутоновой реализации I_{gray} в значение признака m_1 имеет вид:

$$\begin{aligned}
&A\lg(I_{gray}\downarrow,\eta_0\downarrow;m_1\uparrow) = \\
&\Big\langle I_{gray} \Rightarrow I_{bin} = \Re_T(\eta_0,\mu_{\text{î êðóæ í î ñò ü}})\left(I_{gray}\right) =< O_T^{gray\to bin}(\cdot,\eta_0),S(\cdot,\mu_{\text{î êðóæ í î ñò ü}}) > (I_{gray}),, \\
&I_{bin} \Rightarrow m_1 = O_P^{probal}(I_{bin};m_1) = \frac{1}{n*m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} I_{bin} = \frac{1}{n*m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left\|x_{ij}\right\| \Big\rangle
\end{aligned}$$

Другим примером использования этой математической модели является решение задачи: структурный элемент представлен в форме окружности $\mu_{\text{î êðóæ í î ñò ü}}$ в полутоновой реализации I_{gray}. Применив операцию конвертирования полутоновой реализации в бинарную, как в предыдущем примере, получаем снова бинарную реализацию. В этой бинарной реализации содержится структурный элемент $\mu_{\text{окружность}}$, алгоритм которого имеет вид:

$$A\lg(I_{gray}\downarrow,\left(\eta_0,\mu_{\text{î êðóæ í î ñò ü}}=\left\langle i_0,j_0,r\right\rangle\right)\downarrow;m_1\uparrow)$$
$$\left\langle I_{gray}\Rightarrow I_{bin}=\Re_T(\eta_0,\mu_{\text{î êðóæ í î ñò ü}})\left(I_{gray}\right)=<O_T^{gray\to bin}(\cdot,\eta_0),S(\cdot,\mu_{\text{î êðóæ í î ñò ü}})>(I_{gray}),\right.$$
$$I_{bin}\Rightarrow B=\left\{\left\langle x_{ij},\quad\langle i,j\rangle\right\rangle\mid\left(I_{bin}=\left\|x_{ij}\right\|\right)\wedge\left(\forall x_{ij}=1\right)\left[(i-i_0)^2+(j-j_0)^2=r^2\right]\right\},$$
$$\left.B\Rightarrow\left\{q_1,\ldots,q_m\right\}\right\rangle$$

3. МДАИ и пространство состояний изображения

Алгебры бинарных реализаций с логическими главными операциями. Пусть задано множество бинарных реализаций $M_{bin}=\left\{I_{bin}\right\}$, где $I_{bin}=\left\|x_{ij}\right\|,\quad x_{ij}\in\left\{0,1\right\}$. В качестве главных операций выбраны бинарные булевы функции «И» (обозначается $\wedge$), «ИЛИ» (обозначается $\vee$) и «исключающее ИЛИ» (обозначается $\oplus$).

Определение: Матричной конъюнкцией над бинарными реализациями $I_{bin}{}'=\left\|x_{ij}{}'\right\|,\quad x_{ij}{}'\in\left\{0,1\right\}$ и $I_{bin}{}''=\left\|x_{ij}{}''\right\|,\quad x_{ij}{}''\in\left\{0,1\right\}$ называется

$$I_{bin}^{'}\ \wedge\ I_{bin}^{''}\ =\ \left\|x_{ij}^{'}\right\|\ \wedge\ \left\|x_{ij}^{''}\right\|\ =\ \left\|x_{ij}^{'}\ \wedge\ x_{ij}^{''}\right\|\ =\ \left\|x_{ij}\right\|\ =\ I_{bin}$$

Определение: Матричной дизъюнкцией над бинарными реализациями $I_{bin}{}'=\left\|x_{ij}{}'\right\|,\quad x_{ij}{}'\in\left\{0,1\right\}$ и $I_{bin}{}''=\left\|x_{ij}{}''\right\|,\quad x_{ij}{}''\in\left\{0,1\right\}$ называется

$$I_{bin}^{'}\ \vee\ I_{bin}^{''}\ =\ \left\|x_{ij}^{'}\right\|\ \vee\ \left\|x_{ij}^{''}\right\|\ =\ \left\|x_{ij}^{'}\ \vee\ x_{ij}^{''}\right\|\ =\ \left\|x_{ij}\right\|\ =\ I_{bin}$$

Определение: Матричной исключающей дизъюнкцией над бинарными реализациями $I_{bin}{}'=\left\|x_{ij}{}'\right\|,\quad x_{ij}{}'\in\left\{0,1\right\}$ и $I_{bin}{}''=\left\|x_{ij}{}''\right\|,\quad x_{ij}{}''\in\left\{0,1\right\}$ называется

$$I_{bin}^{'}\ \oplus\ I_{bin}^{''}\ =\ \left\|x_{ij}^{'}\right\|\ \oplus\ \left\|x_{ij}^{''}\right\|\ =\ \left\|x_{ij}^{'}\ +\ x_{ij}^{''}\right\|\ =\ \left\|x_{ij}\right\|\ =\ I_{bin}$$

Используя принцип «область определения - множество значений» выделим следующие классы операций:

- Арифметические операции класса A;
- Логические операции класса L;
- Морфологические операции класса M;
- Операции фильтрации класса F;

В работах И.Б. Гуревича [9-12], в основном, исследованы алгебры [4] с главными операциями класса A. В данной работе рассматриваются алгебры остальных классов.

Утверждение: Система $\Re_B^L=\left\langle M_{bin},\quad\{\wedge,\vee,\oplus\}\right\rangle$ является алгеброй класса L типа (2, 2, 2).

Определение: Алгебра $\Re_B^L$ называется алгеброй бинарных реализаций (АБР).

Утверждение: Алгебра $\tilde{\Im}_B^{\wedge}=\left\langle M_{bin},\quad\{\wedge\}\right\rangle$ является полугруппой.

Утверждение: Алгебра $\tilde{\Im}_B^{\vee}=\left\langle M_{bin},\quad\{\vee\}\right\rangle$ является полугруппой.

Утверждение: Алгебра $\tilde{\Im}_B^{\oplus}=\left\langle M_{bin},\quad\{\oplus\}\right\rangle$ является полугруппой.

Утверждение: Алгебра $\mathfrak{M}_B^{\vee} = \langle M_{bin}, \quad \{\vee, O\} \rangle$ есть моноид.

Утверждение: Алгебра $\mathfrak{M}_B^{\oplus} = \langle M_{bin}, \quad \{\oplus, O\} \rangle$ есть моноид.

Утверждение: Алгебра $\mathfrak{I}_B^{\oplus} = \langle M_{bin}, \quad \{\oplus, f'\} \rangle$, где $(\forall x \in M_{bin})[f'(x) = x]$ есть абелева группа типа (2,1).

Проведем исследования основных бинарных логических операций (табл. 3) на предмет их использования в роли главных операций [4].

Таблица 3.

Основные бинарные логические операции

Аргум енты		**Булевы функции**													
x	y	f_x	f_y	x'	y'	$\wedge$	$\vee$	$+$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\leftrightarrow$	$\rightarrow'$	$\leftarrow'$	$\downarrow$	$\mid$
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0

В результате можно выявить на роль главных операций АБР бинарные функции $f_x(x,y) = x$ и $f_y(x,y) = y$ (или, $xf_xy = x$ и $xf_yy = y$ соответственно).

Определение: Функция $F_x\left(I'_{bin}, I''_{bin}\right) = I'_{bin}F_xI''_{bin} = \|x_{ij}\|F_x\|y_{ij}\| = \|x_{ij}f_xy_{ij}\| = \|x_{ij}\|$ называется матричным $f_x(x,y)$ и обозначается $F_x(x,y)$ или F_x.

Определение: Функция $F_y\left(I'_{bin}, I''_{bin}\right) = I'_{bin}F_yI''_{bin} = \|x_{ij}\|F_y\|y_{ij}\| = \|x_{ij}f_yy_{ij}\| = \|y_{ij}\|$ называется матричным $f_y(x,y)$ и обозначается $F_y(x,y)$ или F_y.

Утверждение: Система $\mathfrak{R}_B^L = \langle M_{bin}; \{F_x, F_y\} \rangle$, где $L = \{F_x, F_y\}$ есть алгебра типа (2, 2) и класса L.

Следствие: Система $\mathfrak{R}_B^{F_x} = \langle M_{bin}; \{F_x\} \rangle$ есть алгебра типа (2) и класса L.

Следствие: Система $\mathfrak{R}_B^{F_y} = \langle M_{bin}; \{F_y\} \rangle$ есть алгебра типа (2) и класса L.

Утверждение: Алгебра $\mathfrak{R}_B^{F_x}$ есть полугруппа $\widetilde{\mathfrak{I}}_B^{F_x}$.

Утверждение: Алгебра $\mathfrak{R}_B^{F_y}$ есть полугруппа $\widetilde{\mathfrak{I}}_B^{F_y}$.

Для дальнейшего развития полугрупп $\mathfrak{R}_B^{F_x}$ и $\mathfrak{R}_B^{F_y}$ необходимо выделить нейтральный элемент относительно главных бинарных операций F_x и F_y [4]. Из определений ясно, что для функции f_x существует только правый нейтральный элемент, а для функции f_y - только левый нейтральный элемент. Следовательно, на основе матричных операций F_x и F_y нельзя построить моноиды, ибо в них должны существовать нейтральные и справа, и слева одинаковые элементы. Аналогично, на базе этих операций также нельзя построить группы, ибо будут отсутствовать и симметричные элементы.

Аналогичным образом можно исследовать булевы функции $x^{'}$, $y^{'}$, $\to$, $\leftarrow$, $\to^{'}$, $\leftarrow^{'}$, $\downarrow$ и $|$ замкнутые на множестве $\{0,1\}$, для которых сформулированы следующие теоретические положения.

Утверждение: Система $\Re_B^L = \left\langle M_{bin}; \left\{ x^{'}, y^{'}, \to, \leftarrow, \to^{'}, \leftarrow^{'}, \downarrow, | \right\} \right\rangle$, где $L = \left\{ x^{'}, y^{'}, \to, \leftarrow, \to^{'}, \leftarrow^{'}, \downarrow, | \right\}$ есть алгебра типа (2, 2, 2, 2, 2, 2) и класса L.

Следствие: Системы

$$\Re_B^{x^{'}} = \left\langle M_{bin}; \left\{ x^{'} \right\} \right\rangle, \quad \Re_B^{y^{'}} = \left\langle M_{bin}; \left\{ y^{'} \right\} \right\rangle, \quad \Re_B^{\to} = \left\langle M_{bin}; \{\to\} \right\rangle, \quad \Re_B^{\leftarrow} = \left\langle M_{bin}; \{\leftarrow\} \right\rangle,$$

$$\Re_B^{\to^{'}} = \left\langle M_{bin}; \left\{ \to^{'} \right\} \right\rangle, \quad \Re_B^{\leftarrow^{'}} = \left\langle M_{bin}; \left\{ \leftarrow^{'} \right\} \right\rangle, \quad \Re_B^{\downarrow} = \left\langle M_{bin}; \{\downarrow\} \right\rangle, \quad \Re_B^{|} = \left\langle M_{bin}; \{|\} \right\rangle$$

являются алгебрами типа (2) и класса L.

Определение: Матричной эквивалентностью $\Leftrightarrow$ над бинарными реализациями $I_{bin}^{'} = \left\| x_{ij}^{'} \right\|$, $x_{ij}^{'} \in \{0,1\}$ и $I_{bin}^{''} = \left\| x_{ij}^{''} \right\|$, $x_{ij}^{''} \in \{0,1\}$ называется логическая эквивалентность $\leftrightarrow$ над соответствующими элементами этих реализаций, т.е.

$$I_{bin}^{'} \;\Leftrightarrow\; I_{bin}^{''} \;=\; \left\| x_{ij}^{'} \right\| \;\Leftrightarrow\; \left\| x_{ij}^{''} \right\| \;=\; \left\| x_{ij}^{'} \;\leftrightarrow\; x_{ij}^{''} \right\| \;=\; \left\| x_{ij} \right\| \;=\; I_{bin}$$

Утверждение: Система $\Re_B^{\Leftrightarrow} = \left\langle M_{bin}, \ \{\Leftrightarrow\} \right\rangle$ является алгеброй типа (2) и класса L.

Утверждение: Алгебра $\Re_B^{\Leftrightarrow} = \left\langle M_{bin}, \ \{\Leftrightarrow\} \right\rangle$ является полугруппой и обозначается $\tilde{\Im}_B^{\oplus}$, т.е. $\Re_B^{\Leftrightarrow} = \tilde{\Im}_B^{\Leftrightarrow}$

Утверждение: Алгебра $\mathfrak{M}_B^{\Leftrightarrow} = \left\langle M_{bin}, \ \{\Leftrightarrow, I\} \right\rangle$ есть моноид.

Утверждение: Алгебра $\Im_B^{\Leftrightarrow} = \left\langle M_{bin}, \ \left\{ \Leftrightarrow, f^{'} \right\} \right\rangle$, где $(\forall x \in M_{bin}) \left[f^{'}(x) = x \right]$ есть абелева группа типа (2,1).

Алгебры бинарных реализаций с морфологическими главными операциями. В ДАИ также можно построить алгебры с использованием операций математической морфологии в качестве главных операций. Приведем основные результаты, полученные в ходе исследований в этом направлении:

Утверждение: Система $\Re_B^M = \left\langle M_{bin}; \{dl, er, \bullet, \circ\} \right\rangle$, где $M = \{dl, er, \bullet, \circ\}$ есть алгебра типа (2, 2, 2, 2) и класса M.

Следствие: Системы

$$\Re_B^{dl} = \left\langle M_{bin}; \{dl\} \right\rangle, \quad \Re_B^{er} = \left\langle M_{bin}; \{er\} \right\rangle, \quad \Re_B^{\bullet} = \left\langle M_{bin}; \{\bullet\} \right\rangle, \quad \Re_B^{\circ} = \left\langle M_{bin}; \{\circ\} \right\rangle$$

являются алгебрами типа (2) и класса M.

Для дальнейшего развития определенных ранее алгебр нужно выявить из числа рассмотренных главных операций такие, которым свойственна ассоциативность [4]. Ниже приведена общая форма записи свойства для морфологических операций:

$$O_T^{morph}\left(O_T^{morph}\left(I_{bin}; \left(\|\mu_1\| F \|\mu_2\| \right) \right); \|\mu_3\| \right) = O_T^{morph}\left(\|\mu_1\| O_T^{morph}\left(I_{bin}; \left(\|\mu_2\| F \|\mu_3\| \right) \right) \right),$$

где символ F обозначает операцию над масками для морфологических операций, и, следовательно, является некоторым варьируемым параметром.

Алгебры полутоновых реализаций с логическими главными операциями. Следующей разновидностью алгебр изображений, которые были определены в ходе исследований, являются алгебры полутоновых реализаций. Рассмотрим эти алгебры, главные операции которых являются логическими функциями [4].

Пусть задано множество полутоновых реализаций $M_{gray} = \left\{ I_{gray} \right\}$, где $I_{gray} = \left\| x_{ij} \right\|, \quad x_{ij} \in [0,255]$. Главные операции алгебры определим аналогичным образом, как и в случае с алгеброй $\Re_G{}^L$. Ясно, что на M_{gray} можно определить только одну замкнутую операцию – матричную операцию XOR. Дизъюнкция и конъюнкция на множестве $[0,255]$ не являются замкнутыми.

Определение: Матричной операцией XOR называется операция XOR

$$A \oplus B = \left\| a_{ij} \right\| \oplus \left\| b_{ij} \right\| = \left\| a_{ij} + b_{ij} \right\|, \quad A = \left\| a_{ij} \right\|, \quad B = \left\| b_{ij} \right\|$$

Определение: Алгеброй полутоновых реализаций (АПР) $\Re_G{}^L$ называется алгебра типа (2) с основным множеством M_{gray} и главной бинарной операцией $\oplus$, т.е. $\Re_G{}^L = \left\langle M_{gray}, \quad \{\oplus\} \right\rangle$.

Определение: Полугруппа $\tilde{\Im}_P^{\oplus}$ называется полугруппой полутоновых реализаций.

Утверждение: Алгебра $\Re_G{}^L = \left\langle M_{gray}, \quad \{\oplus\} \right\rangle$ является полугруппой, которая обозначается $\tilde{\Im}_G^{\oplus}$, т.е. $\Re_G{}^L \equiv \tilde{\Im}_G^{\oplus}$.

Утверждение: Алгебра $\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}} = \left\langle M_{gray}, \quad \{\oplus, \quad O\} \right\rangle$ есть моноид.

Введем в алгебру дополнительную унарную операцию $f^{'}$. Под унарной операцией $f^{'}$ будем понимать матричное отображение:

$$f^{'} : M \to M$$

Такое отображение для каждого элемента M_{gray} ставить в соответствие тот же самый элемент. Это означает, что отображению $f^{'}$ является рефлексивным отображением [4].

Утверждение: Алгебра $\Im_G{}^{\oplus} = \left\langle M_{gray}, \quad \{\oplus, \quad f^{'}\} \right\rangle$ есть абелева группа типа (2, 1) и класса L.

Следствие: Абелева группа $\Im_G{}^{\oplus}$ есть группа конечного порядка.

Алгебры полутоновых реализаций с главными операциями фильтрации. Аналогично можно определить алгебры полутоновых реализаций (АПР) с главными операциями фильтрации. Алгебра, основное множество которой состоит из реализаций, а множество главных операций – из процедурных преобразований позволяет исследовать процесс преобразования исходных изображений в конечные изображения. По-другому этот процесс преобразования можно назвать решением поставленной задачи или процессом конструирования хода решения задачи. Например, если возьмем в качестве начальных данных некоторое изображение, то процесс его фильтрации является процессом сведения начального изображения к целевому состоянию, в котором полностью или частично отсутствует ненужная информация.

Утверждение: Система $\Re_P^F = \left\langle M_{gray}, \left\{ O_T^{filter}\left(\cdot;\overline{\mu}\right) \right\} \right\rangle$ является алгеброй типа (1) и класса F.

Замечание: Как известно введение во множество главных операций дополнительных операций позволяет специализировать и конкретизировать алгебру. Введение дополнительных главных операций и конкретизация алгебры накладывает на нее ограничения в смысле уменьшения способов взаимного описания элементов [4]. Подобные алгебраические структуры находят большое применение на практике и считаются наиболее ценными.

Определение: Алгебра $\Re_P^F$ называется алгеброй фильтрации полутоновых реализаций (АФПР).

Пространство состояний изображений. В вычислительных системах изображения, представленные в разных форматах, группируются в бинарные, полутоновые и цветные реализации изображений. Набор однотипных реализаций можно рассматривать в качестве элементов основного множества алгебры. В данном случае алгебра формирует единую среду оперирования над этими элементами. Роль операций играют главные операции алгебры, которые могут иметь различные ранги: нульместные, унарные, бинарные и т.д. Главные операции алгебры замкнуты на ее основном множестве, т.е. применение любой главной операции к элементам основного множества позволяет получить снова элементы из этого множества. К числу таких операций можно отнести все возможные бинарные операции над реализациями.

Преобразования типа конвертации не могут быть главными операциями в пределах алгебры, содержащей однотипные реализации. Ибо, операция конвертирования по определению направлена на изменение типа ее аргумента. Это и означает, что она не может войти в список главных операций. Используя операцию конвертирования, возможно, осуществить переход из одной разновидности алгебры в другую. Следовательно, постановка любой задачи обработки, анализа и распознавания изображений предполагает задание исходных данных во всех форматах. Совокупность исходных изображений будет разделено на группы однотипных реализаций: бинарных, полутоновых и цветных. Наиболее важными среди них являются цветные изображения, что связано с возможностью получения из них остальных видов реализаций. Если реализация получена на аппаратном уровне, то ей будет присуща природа устройства фиксации изображения. Если же она получена посредством операции конвертирования, то данные будут отражать недостатки метода конвертации и природу устройства, фиксирующего цветные изображения. На выделенных группах возможно создание дескриптивных алгебр изображений за счет выбора замкнутых операций над реализациями в виде главных операций создаваемых алгебр. Эти алгебры будут образовывать всего лишь некоторые подпространства для единого пространства, где будет рассматриваться процесс решения задач обработки, анализа и распознавания изображений.

Определение: совокупность дескриптивных алгебр изображений $I_f, \quad f \in \{bin, gray, color\}$, элементы основных множеств которых содержательно одинаковы, а переход между ними осуществляется процедурным преобразованием O_T, называется пространством состояний изображений (ПСИ) и обозначается GS_I, т.е.

$$GS_I = \left\langle \{I_f\}, \{O_T\} \right\rangle, \text{ где } f \in \{bin, gray, color\}$$

Утверждение: Упорядоченная совокупность $\left\langle \{I_{bin}, \quad I_{gray}, \quad I_{color}\}, \{O_T^{X \to Y}\} \right\rangle$ есть пространство состояний изображений.

Замечание: Операция конвертирования допускает переходы только в одном направлении. Возможно создание специфичных операций обработки изображений допускающих переходы и в обратных направлениях. Алгебры в ПСИ образуют его подпространства.

Важной задачей является оценка мощности основных множеств ДАИ, образующих ПСИ. В ходе исследований были получены формулы для вычисления числа состояний реализаций в алгебрах $\mathfrak{R}_B^g$, $\mathfrak{R}_G^g$ и $\mathfrak{R}_C^g$ соответственно:

1. $P(M_{bin}) = 2^{nm}$
2. $P(M_{gray}) = 256^{nm}$
3. $P(M_{color}) = \left(256^3\right)^{nm}$,

где P - количество взаимно различных элементов множества

ПСИ является математическим объектом, моделирующим среду поиска и построения решений задач обработки, анализа и распознавания изображений. Использование процедурных преобразований в качестве унарных главных операций подпространств ПСИ позволит легко преобразовывать одни реализации в другие в пределах этих подпространств. Использование операции конвертирования позволяют переходить из одного подпространства в другое. Следовательно, возможно математически описать процессы преобразования изображений и оценивания выбранных характеристик для изображений. В таком случае постановка основной задачи теории обработки и анализа изображений будет сформулировано следующим образом:

Даны реализации $\{I_{bin}, \; I_{gray}, \; I_{color}\}$ *изображения* I *для заданной предметной области в ПСИ* $GS_I = \left\langle \{I_{bin}, \quad I_{gray}, \quad I_{color}\}, \{O_T^{X \to Y}\} \right\rangle$. *Найти путь из исходных данных* $\{I_{bin}, \; I_{gray}, \; I_{color}\}$ *к такой реализации, которая позволит однозначно определить значения выбранных признаков, характеризующих содержимое изображения* I.

Такая формулировка задачи позволяет однозначно определить эффективный метод ее решения. Система технического зрения, как пример системы обработки, анализа и распознавания изображения, может быть смоделирована на базе МДАИ. Следовательно, используя ПСИ можно получить математическую модель процесса функционирования системы технического зрения.

Заключение

Материалы и результаты исследований, приведенные в данной статье, отражают суть идеи развития ныне существующего дескриптивного подхода к обработке и анализу изображения, предложенного И.Б. Гуревичем и его учениками. Основой этих исследований является алгебраический подход к алгоритмам в области теории распознавания образов, предложенный Ю.И. Журавлевым. Уникальность и оригинальность этих работ вызывает восхищение. Эти работы являются еще одним примером использования абстрактных алгебраических структур и систем в конкретной прикладной области. Актуальность таких исследований заключается в попытке математизации и систематизации ряда научных направлений, методологии которых находятся пока еще на стадии развития. Предложенный И.Б. Гуревичем подход, систематизации и строго представления методов и технологий обработки и анализа изображений позволил бы открыть теоретические исследования в ряде прикладных областей, которые используют методологию теории обработки и анализа изображений.

В статье предлагается полная альтернатива этому подходу на основе универсальных алгебр без операторного кольца. Хотя в этих двух подходах проглядывается полная аналогия в их строении и развитии, они не являются равнозначными в смысле их полноты. Теоретические конструкции, образующие методологию подхода, являются необходимыми для ясного понимания их сущности и применения при решении задачи математического моделирования систем обработки и анализа изображений. К числу важным теоретических элементов относятся: классы реализаций, понятие модели дескриптивной модели изображения, семантическая и контекстная информация изображения, простые (операция структуризации, процедурные и параметрические преобразования) и сложные операции (Т- и Р-представления) над реализациями изображений, модифицированные дескриптивные алгебры изображений и классы их главных операций, пространство состояний изображений, как математическая модель среды решения задач обработки и анализа изображений. По мнению авторов этой статьи, данный подход также имеет свое право на существование, ибо изложена в строго математической форме и систематизирована, в отличие от первого подхода (подход И.Б. Гуревича) имеет ряд уникальных достоинств. Используя этот подход можно легко задачи обработки и анализа изображений свести к задачам вычислительной математики. Кроме того, элементы и объекты этой теории закладывают перспективу введения в функциональный анализ матричного пространства и исследования различных метрик в нем. Не менее важным является перспектива рассмотрения задач обработки и анализа в пространстве состояний изображения, как задач поиска и оптимизации метрик вычислительной математики.

Литература

1. Воротников С.А. Информационные устройства робототехнических систем: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 384 с.
2. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде Matlab. М.: Техносфера, 2006
3. Горелик А.Л. Методы распознавания: Учеб. пособие для вузов / А.Л. Горелик, В.А. Скрипкин. – 4-е изд., испр. – М.: Высш. Шк., 2004. – 261 с.
4. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов. – М.: Высш. Школа, 1979. – 559 с.
5. Потапов А.С. Распознавание образов и машинное восприятие, 2007. 460 с.
6. Фу К. Структурные методы в распознавании образов, 1977. 540 с.
7. Фурман Я.А., Юрьев А.Н., Яншин В.В. Цифровые методы обработки и распознавания бинарных изображений, 1992. 326 с.
8. Хорн Б.К.П. Зрение роботов, 1989. 378 с.
9. I.B. Gurevich, V.V. Yashina. Descriptive Image Algebras with One Ring // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications, Vol. 13, No.4., 2003. - pp. 579-599.
10. I.B. Gurevich, V.V Yashina. Algorithmic Scheme Based on a Descriptive Image Algebra with One Ring: Image Analysis Example // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. - MAIK "NaukaAnterperiodica", 2005. - Vol.15, No.l. - P.192-194.
11. I.B. Gurevich, V.V. Yashina. Operations of Descriptive Image Algebras with One Ring // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. Pleiades Publishing, Inc. 2006. – Vol.16,No.3.-pp. 298-328.
12. I.B. Gurevich and V.V. Yashina. Descriptive Approach to Image Analysis: Image Models // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. – MAIK "Nauka/Interperiodica"/Pleiades Publishing, Inc., 2008. - Vol.18, No.4. - P. 518-541.